

4.4 Модели с равномерным наполнением запаса с дефицитом

α – интенсивность пополнения

p – удельные потери от дефицита

y – уровень запаса

w – дефицит

$$y^* = \sqrt{\frac{2k\beta(p+h)}{p h \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}}$$

$$w^* = \sqrt{\frac{2k\beta \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)}{p(p+h)}}$$

$$t1^* = \frac{y^* - w^* \cdot i}{\alpha}$$

$$t2^* = \frac{y^* - w^* \cdot i}{\beta}$$

$$t3^* = \frac{w^* \cdot i}{\beta}$$

$$t4^* = \frac{w^* \cdot i}{\alpha}$$

$$U(y^*) = \frac{k\beta}{y^* \cdot i}$$

5.1 Алгоритм Джонсона

Включает следующие этапы:

1. Поиск наименьшего элемента

Рассмотрим все t_{1j} и t_{2j} и среди них выберем минимальное, т.е.

$$\min\{t_{1j}; t_{2j}\} = \begin{cases} t_{1j}; & \text{этот номер в начало} \\ t_{2j}; & \text{этот номер в конец} \end{cases}$$

t_{1j} – время обработки j -го изделия на 1-й машине, t_{2j} – на 2-й машине.

2. Перестановка изделий

Если выбранная величина находится в 1-й строке (относится к 1-й машине), то соответствующее изделие помещается на обслуживание в первую возможную очередь. Если – во 2-й строке (относится к 2-й машине) – то в последнюю очередь.

3. Исключение из рассмотрения выбранного изделия

Выбранному изделию присваивается новый номер в очереди, который в дальнейшем считается занятым. Из последующего рассмотрения оно исключается.

Далее осуществляется переход к этапу 1. После определения оптимального порядка обработки изделий на машинах графически определяется время простоя и работы 2-й машины, которое является минимальным из всех возможных.

5.2 Задача распределения заказов

N – номер заказа

V – Объем заказа

t_{iK} – норматив обработки изделия i -го заказа на k -том станке (штук в ед. вр.)

T_{iK} – общие затраты времени на i -ый заказ при его выполнении на k -том станке

R_k – ресурс времени k -го станка

P_k – использованное время k -го станка

Изделия любого заказа можно обработать на любом из 4 станков А, В, С, D. Время выполнения заказов разное. Весь заказ должен быть выполнен на одном станке.

$T_{iK} = \frac{V}{tiK}$ - общие затраты времени

Рассчитаем I_{iK} – индикатор

I_{iK} : для каждого станка имеющего наибольший норматив t_{iK} присваивается

$I_{iK} = 1$, для остальных станков индикатор рассчитывается по формуле:

$$I_{iK} = \frac{T_{iK}}{T_{iK \max t_{iK}}}$$

Распределение заказов происходит следующим образом: заказ отдается станку с \min значением индикатора, при условии, что станок имеет достаточный ресурс времени.

6.1 Планирование комплекса работ. Упорядочение.

Система СПУ охватывает следующие основные этапы планирования и управления комплексом работ:

- 1) выявление работ, которые необходимо произвести в процессе проектирования или изготовления некоторого изделия и связей между ними;
- 2) построение сетевого графика процесса на основе 1);
- 3) установление количественных оценок по каждой работе (время, стоимость, ресурсы);
- 4) расчет параметров сетевого графика вручную или с помощью ЭВМ;
- 5) анализ и оптимизация сетевого графика (вручную или с помощью ЭВМ) с целью получения определенных оптимальных показателей (минимальное время выполнения работ, минимальная стоимость, минимальная экономия ресурсов;
- б) использование сетевого графика как основного элемента инструмента управления ходом работ.

Упорядочение сетевого графика производится по методу ранжирования.

Упорядочение заключается в том, чтобы ликвидировать излишние логические связи и события, изменить расположение событий и работ для наглядного изображения, уменьшить количество пересечений.

6.2 Алгоритм задачи сетевого планирования. (Критический путь)

Критический путь ($L_{кр}$) – это полный путь, имеющий наибольшую продолжительность из всех полных путей. Продолжительность такого пути определяет продолжительность всего комплекса работ А, Б, Ж, К, Л.

На сетевом графике может быть несколько критических путей. А работы, составляющие критический путь называются критическими.

6.3 Параметры работ

Параметры работ:

Продолжительность работы $t(i,j)$

Ранний срок начала работы $t_{рн}(i,j)$. $t_{рн}(i,j) = t_p(i)$

Ранний срок окончания работ $t_{ро}(i,j)$. $t_{ро}(i,j) = t_p(i) + t(i,j)$

Поздний срок окончания работ $t_{по}(i,j)$. $t_{по}(i,j) = t_{пj}$

Поздний срок начала работ $t_{пн}(i,j)$. $t_{пн}(i,j) = t_{пj} - t_{ij}$

Резерв времени пути определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути. $R(L) = t_{кр} - t(L)$. Он показывает, на сколько в сумме могут быть увеличены продолжительность всех работ, принадлежащих этому пути.

Вывод: любая из работ пути L на его участке, не совпадающем с критическим путем, обладает резервом времени.

Среди резервов времени выделяют 4 разновидности резервов.

а) полный резерв времени $Rп(i,j)$ работы (i,j) – показывает насколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменяется. $Rп(i,j) = t_{пj} - t_{пi} - t(i,j)$

Полный резерв времени равен резерву максимальному из путей, проходящих через данную работу. Важным свойством является то, что он принадлежит не только этой работе, но и всем полным путям, проходящим через нее.

б) частный резерв времени 1–го вида $R1(i,j)$ есть часть полного резерва времени, на который можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события $R1(i,j) = t_{пj} - t_{пi} - t(i,j)$ или $R1(i,j) = Rп(i,j) - R(i)$

Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное событие совершаются в свои самые поздние сроки.

в) частный резерв 2–го вида $Rс(i,j)$ или свободный резерв представляет часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. $Rс(i,j) = t_{пj} - t_{пi} - t(i,j)$ или $Rс(i,j) = Rп(i,j) - R(j)$

Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события совершаются в свои самые ранние сроки.

г) Независимый резерв времени $Rн(i,j)$.

Это часть полного резерва времени, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие

работы начинаются в ранние сроки. $R_n(i,j) = tp(j)-tp(i)-t(i,j)$ или $R_n(i,j) = R_p(i,j)- R(i)-R(j)$

Таким образом, если частичный резерв времени 1-го вида может быть использован на увеличение продолжительности данной и последующих работ без затрат резерва времени предшествующих работ, свободный резерв времени – на увеличение продолжительности данной и предшествующих работ без нарушения резерва времени последующих работ, то независимый резерв времени может быть использован для увеличения продолжительности только данной работы.

Работы, лежащие на критическом пути, так же, как и критические события, резервов времени не имеют.

Если на критическом пути лежит начальное событие i , то $R_p(i,j) = R_l(i,j)$

Если на критическом пути лежит конечное событие, то $R_p(i,j) = R_c(i,j)$

Если на критическом пути лежит начальное и конечное событие i и j , но сама работа не принадлежит этому пути, то $R_p(i,j) = R_l(i,j) = R_c(i,j) = R_n(i,j)$

6.4 Коэффициент напряженности не критических дуг

Коэффициентом напряженности $K_n(i,j)$ работы называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим – критический путь:

$$K_n(i,j) = \frac{t(L_{max}) - t'_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}} \quad \text{или} \quad K_n(i,j) = 1 - \frac{R_n(i,j)}{t_{кр} - t'_{кр}}$$

$t(L_{max})$ – продолжительность максимального пути, проходящего через работы (i,j)

$t_{кр}$ – продолжительность критического пути

$t'_{кр}$ – продолжительность отрезка рассматриваемого пути совпадающий с критическим путем

Чем ближе к 1 коэффициент напряженности $K_n(i,j)$, тем сложнее выполнить данную работу в установленные сроки. Чем ближе $K_n(i,j)$ к нулю, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь, проходящий через данную работу.

Между полным резервом и коэффициентом напряженности нет однозначной зависимости.

Вычисление коэффициента напряженности позволяет дополнительно классифицировать работы по зонам. В зависимости от величины $K_n(i,j)$ выделяют три зоны: критическую ($K_n(i,j) > 0.8$); подкритическую ($0.6 < K_n(i,j) < 0.8$); резервную ($K_n(i,j) < 0.6$).

6.5 Оптимизация сетевого графика Время – стоимость

Оптимизация сетевого графика – это процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

Наиболее распространенным методом оптимизации сетевого графика в настоящее время является метод «время – стоимость».

При использовании мет. «время-стоимость» предполагается, что уменьшение продолжительности работы пропорционально ее стоимости.

Каждая работа (i,j) характеризуется продолжительностью t(i,j).

(i,j) → t(i,j) причем продолжительность попадает в коридор: $\alpha(i,j) \leq t(i,j) \leq \beta(i,j)$

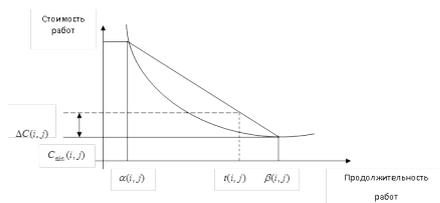
При этом $\beta(i,j)$ – нормальная продолжительность работы (i,j), соответственно $\alpha(i,j)$ – минимально возможная (экстренная) продолжительность работы (i,j), которую только можно осуществить в условиях разработки.

При этом стоимость C(i,j) работы (i,j) заключена в границах от

$$C_{\min}(i,j) \leq C(i,j) \leq C_{\max}(i,j)$$

$C_{\min}(i,j)$ – при нормальной продолжительности работы

$C_{\max}(i,j)$ – при экстремальной продолжительности работы



$$\Delta C(i,j) = [\beta(i,j) - t(i,j)]h(i,j);$$

$$h(i,j) = \operatorname{tg} \alpha.$$

$h(i,j)$ – показывает затраты на ускорение работы (i,j) (по сравнению с нормальной продолжительностью) на ед. времени.

$$h(i,j) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_{\max}(i,j) - C_{\min}(i,j)}{\beta(i,j) - \alpha(i,j)}$$

$$C = \sum_{i,j} C(i,j)$$

$$\Delta C(i,j) = \sum_{i,j} \Delta C(i,j) = \sum_{i,j} [\beta(i,j) - t(i,j)]h(i,j)$$

где C – стоимость проекта, ΔC – величина уменьшения проекта.

При оптимизации сети будем пользоваться правилами:

Правило 1) Если сетевой гр. имеет единств. критич. путь рассмотрим все возможные отрезки продолжительностей работ критич. пути и сократим продолжительность той работы, которая имеет наименьший коэф-т затрат на ускорение.

Правило 2) Если крит. путей у сетевого графика 2 или более, то необходимо разделить работы, лежащие на критич. путях на 2 группы. В I группу включить работы общие для всех критических путей, а во II – работы, которые не являются общими для всех критич. путей. а)Для

подгруппы I применить правило 1. б) Для уменьшения продолжительности проекта путем ускорения работ в подгруппе II нужно одновременно ускорить 2 или более работы, принадлежащие разным крит. путям. При этом работы рассматриваются в некоторой произвольной комбинации.

6.6 Оптимизация стоимости работ при заданной продолжительности его выполнения.

Оптимизировать сетевой график по критерию минимизации затрат при заданной продолжительности выполнения всего комплекса работ можно 2 способами:

Первый способ заключается в уменьшении продолжительности выполнения работ, начиная с тех, которые дают наименьший прирост затрат.

Второй способ заключается в увеличении продолжительности выполнения работ начиная с тех, которые дают наибольший прирост затрат.

Определенные любым из указанных способов оптим. затраты должны иметь одинаковую величину.

7.1 Принятие решений в условиях определенности

Основная трудность – наличие нескольких критериев, по которым следует сравнивать исходы.

а) пусть имеется совокупность критериев:

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), x \in X$$

Найти решение, которое окажется наилучшим в смысле выбираемого критерия.

Если все критерии измеряются в одной шкале, то обобщенный критерий $F_0(x)$ можно записать в виде взвешенной суммы этих критериев.

$$F_0(x) = \sum_{i=1}^n W_i F_i(x)$$

где W_i – вес соответствующего критерия.

В этом случае нужно найти $\max_x F_0(x)$.

Если же критерии измеряются в различных шкалах, то необходимо привести их к одной шкале. Для этого формируют критерий

$$\min_x F_0(x) = \min_x \sum_{i=1}^n W_i \frac{F(x_i) - F(x_i)}{\zeta_i}$$

$$\text{где } F_i(x_i^*) = \max_x F_i(x_i)$$

б) пусть критерии упорядочены в последовательности $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$. Тогда задача отыскания оптимального решения может быть описана как

$$\max_{x \in X} F_1(x) \text{ при ограничениях } F_2(x) \geq F_{2\text{дон}} \dots F_n(x) \geq F_{n\text{дон}}$$

7.2 Принятие решений в условиях неопределенности. Игры с природой. Критерии максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица, Лапласа

Игры с природой. Под II игроком будем понимать природу, то есть действие природы не направлены против I игрока, поэтому в игре с природой, осознано действует только один игрок, т.е. лицо принимающее решение. Природа является вторым игроком, но не противником. Изучение игр с природой должно начинаться с построения платежной матрицы. Это очень важная задача. Пусть игрок А имеет m стратегий. $A_1 \dots A_m$. Q- природа, имеет n состояний $Q_1 \dots Q_n$.

$$\begin{matrix} & Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n & \dots \\ A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

a_{ij} – выигрыш игрока А, если он придерживается стратегии A_i , а природа находится в состоянии Q_j .

В игре с природой можно доминировать стратегии, что может позволить уменьшить размерность платежной матрицы.

Поскольку природа не стремится к выигрышу, а действует неосознанно, то стратегии природы не могут доминировать.

Показателем благоприятности состояния Q_j природы Q называется наибольший выигрыш при этом состоянии, т.е. наибольший элемент j-го столбца. $\beta_j = \max_i a_{ij} \quad \forall j = \overline{1, n}$

$$\text{Риск} - r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$$

Т.е. риск – это разность между выигрышем, который игрок получил бы если бы он точно знал, что состояние среды будет Q_j и выигрышем, который он получит, не имея этой информации.

Т.е. r_{ij} – риск игрока А представляет собой упущенную возможность max-го выигрыша β_j при данном состоянии природы.

Вывод: точная информация о действительном состоянии природы Q_j позволяет игроку выиграть ту стратегию A_i , при которой его выигрыш будет max.

$$\text{Введем величину } \omega_j = \min_i a_{ij} \quad \forall j = \overline{1, n}$$

ω_j – наименьший выигрыш, который получит I игрок если придерживается стратегии A_i , а природа находится в состоянии Q_j .

$$0 \leq r_{ij} \leq \beta_j - \omega_j$$

$\beta_j - \omega_j$ – колебание выигрышей, при состоянии природы Q_j .

Существует несколько критериев для выбора оптимальной стратегии.

a) **Максимальный критерий Вальда** $W = \max_i \min_j a_{ij}$

По критерию Вальда выбирают стратегию, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем состоянии среды.

Позиция крайнего пессимизма, рассчитанная на худший случай, т.е. игрок не столько хочет выиграть, сколько хочет не проиграть.

Этот критерий в технических и экономических задачах применяется чаще всего. Здесь не допускается никакой риск.

б) *Критерий Гурвица* основан на следующих предположениях: среда может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $1-\alpha$ и в самом выгодном – с вероятностью α , где α – коэффициент доверия. Тогда решающее правило записывается так: $\max_{xi} u_{xi}$ при $0 \leq \alpha \leq 1$

S_k – состояние среды(природы)

X_i – стратегия

Если $\alpha=0$, то получаем критерий Вальда.

Если $\alpha=1$, то приходим к решающему правилу вида $\max_{xi} \min_{Sk} u_{xi, Sk}$

так называя стратегию «здорового оптимизма», который верит в удачу.

в) *Критерий Лапласа*. Если неизвестны состояния среды, то все состояния среды считают равновероятными. $P(S_i) = \dots p(S_j) \dots p(S_k)$

В результате решающее правило определяется соотношением $\max_{xi} u_{xi}$ при условии $p(S_k) = \frac{1}{k}$

г) *Критерий Сэвиджа* (критерий минимизации сожалений). «Сожаление» – это величина, равная изменению полезности результата при данном состоянии среды относительно наилучшего возможного состояния. В этом случае критерий для выбора оптимальной стратегии имеет следующий вид: $S = \min_i \max_j r_{ij}$

Выбор критерия принятия решения является наиболее сложным и ответственным этапом в системном анализе. При этом не существует каких-либо общих рекомендаций или советов. Если даже минимальный риск недопустим, то используют критерий Вальда. Если, определенный риск вполне приемлем, то выбирают критерий Сэвиджа.

д) *Критерий максимакса (критерий крайнего оптимизма)*

Из тетради: $M = \max_i \max_j a_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$M = \max_i (9, 8, 6) = 9$ То есть по этому критерию для первого игрока имеем стратегию А1.

7.3 Игры с седловой точкой.

Седловая точка – это пара оптимальных стратегий. Седловая точка является только тогда, когда нижняя и верхняя цена игры совпадают. Это означает, что матрица содержит такой элемент, который является минимальным в своей строке и одновременно максимальным в своем столбце.

$$\alpha_i = \min_{j} a_{ij}, \quad i \leq \overline{1, m}$$

$$\beta_j = \max_{i=1, \dots, m} a_{ij}$$

$$\alpha = \max_{i=1, \dots, m} \alpha_i = \max_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} a_{ij} \quad - \text{нижняя цена } A^*$$

$$\beta = \min_{j=1, \dots, n} \beta_j = \min_{j=1, \dots, n} \max_{i=1, \dots, m} a_{ij} \quad - \text{верхняя цена } B^*$$

α называется нижней ценой игры, а β – верхней ценой игры.

Стратегия A^* называется максиминной

Стратегия B^* называется минимаксной

Если $\alpha = \beta$ – равновесная ситуация (A^*, B^*) → седловая точка найдена

v - цена игры

$$v = \alpha = \beta$$

$\{A^*, B^*, v\}$ – решение матричной игры

Если $\alpha \neq \beta$, то равновесной ситуации нет и при многократном повторении игры у игроков могут возникнуть мотивы к нарушению стратегий.

7.4 Решение игры в смешанных стратегиях 2x2 аналитически и графически

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \text{платежная матрица}$$

Дано

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

Смешанные стратегии игроков

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$$

p_1^0 – оптимальная стратегия

$$p_1^0, p_2^0 = 1 - p_1^0$$

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = v \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = v \end{cases}$$

$$a_{11} p_1 + a_{21} (1 - p_1) = a_{12} p_1 + a_{22} (1 - p_1)$$

$$p_1^0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}$$

$$p_2^0 = 1 - p_1^0 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}$$

$$v = a_{11} p_1^0 + a_{21} p_2^0 = \frac{a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}$$

Транспонируя игру можно легко найти значение q

$$a_{11} q_1 + a_{12} q_2 = v$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

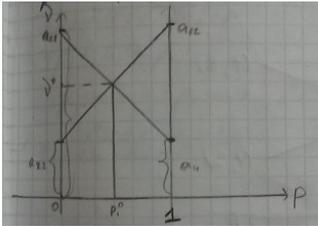
$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} ; \quad q_2 = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}$$

$$a_{11} \neq a_{12}$$

Эту задачу можно решить графически поскольку решение исходной системы представляет собой точку пересечения двух прямых на плоскости (p_1, v) (1-
(p_1, v)

Графическое решение игры 2*2



- 1) На оси ОХ откладываем отрезок $[0, 1]$
- 2) На оси ординат откладываем выигрыши стратегии a_2 , а на прямой $p=1$ выигрыши при стратегии a_1 .
- 3) Строим точки $(0; a_{21})$ и $(1; a_{11})$
 $(0; a_{22})$ и $(1; a_{12})$

7.5 Решение игры в смешанных стратегиях 2xn или mx2 графически

2xn

$$t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Решение игры v

$$v = \min_j (a_{1j}p + a_{2j}(1-p)) = \max_{0 \leq p \leq 1} \min_j (a_{1j}p + a_{2j}(1-p))$$

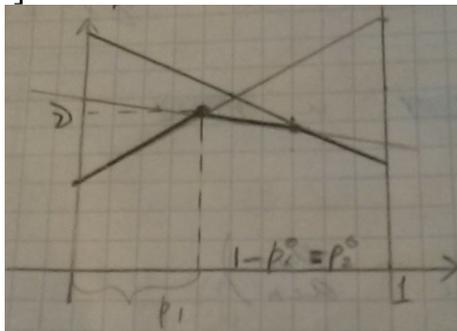
Для нахождения \max по p функции $\min_j (a_{1j}p + a_{2j}(1-p))$ построим график.

Для этого нужно построить n прямых вида

$$\omega_j = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)$$

(p, n)

$p \in [0, 1]$



Найдем стратегию второго игрока:

$$q_1 = q, \quad q_2 = 1 - q, \quad q_3 = 0$$

mx2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$$

В данном случае будем искать min верхней огибающей прямых

$$\omega_i = a_{1i} * q + a_{2i} * (1 - q), \quad i = 1, m$$

